Département des mathématiques et informatique
Filière : SMI
Module : Compilation
Semestre S5
Pr : Mohamed Errais

FACULTE DES SCIENCES AIN CHOCK
UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

TD 2 : Opérations sur les AFN

Exercice 1 :

1. Donner les automates déterministes équivalents aux automates suivants sur l'alphabet {0,1}

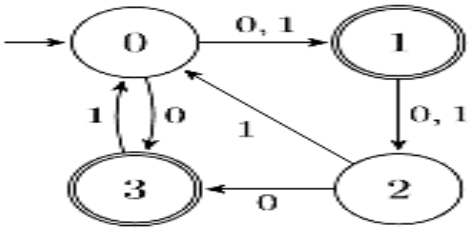
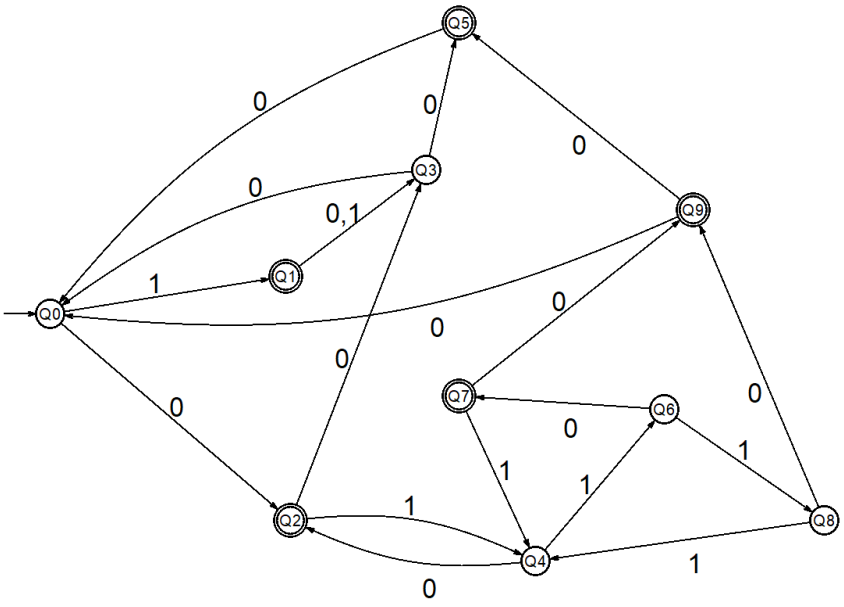


Figure 1: Automate A1

Solution pour l'automate A1 :

	0	1
{0} = Q0	{1,3}	{1}
{1} = Q1	{2}	{2}
{1,3} = Q2	{2}	{0,2}
{2} = Q3	{3}	{0}
{0,2} = Q4	{1,3}	{0,1}
{3} = Q5	-	{0}
{0,1} = Q6	{1,2,3}	{1,2}
{1,2,3} = Q7	{2,3}	{0,2}
{1,2} = Q8	{2,3}	{0,2}
{2,3} = Q9	{3}	{0}

- Comme l'ensembles des états finals de l'automate A1 est F = {1,3}, alors l'ensemble des états finals de l'automate déterministe est F0 = {{1},{3}, {1,3}, {1,2,3}, {2,3}}
- Voici l'automate déterministe équivalente de A1 :



Solution pour l'automate A2 :

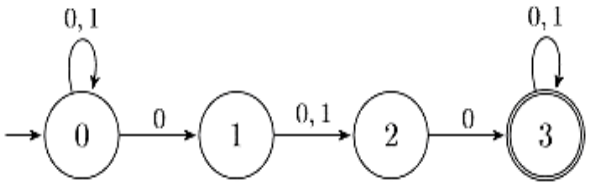
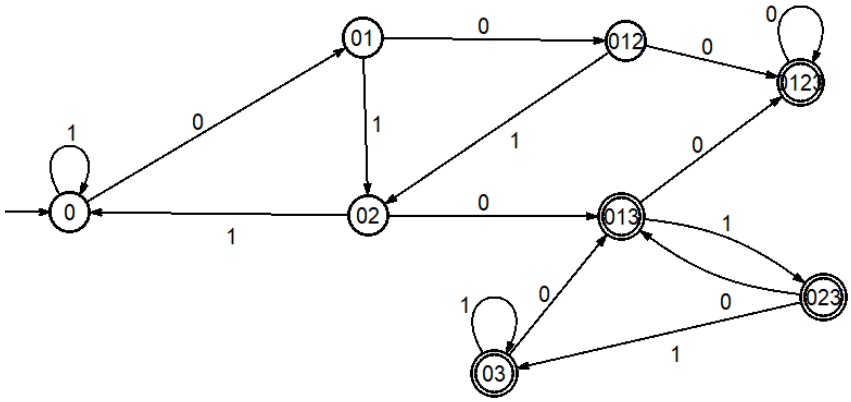


Figure 2: Automate A2

	0	1
{0}	{0,1}	{0}
{0,1}	{0,1,2}	{0,2}
{0,2}	{0,1,3}	{0}
{0,1,2}	{0,1,2,3}	{0,2}
{0,1,3}	{0,1,2,3}	{0,2,3}
{0,1,2,3}	{0,1,2,3}	{0,2,3}
{0,2,3}	{0,1,3}	{0,3}
{0,3}	{0,1,3}	{0,3}



Solution pour l'automate A3 :

NB : aε = a et εa=a et εaε=a

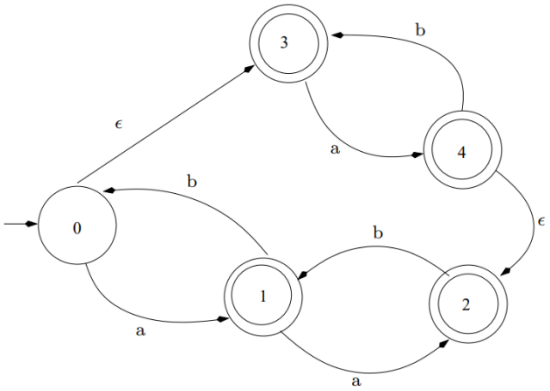
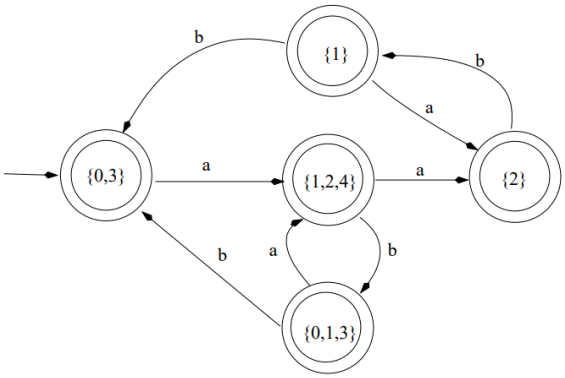


Figure 3:Automate A3

	a	b
{0,3}	{1,2, 4}	{}
{1,2,4}	{2}	{0,1,3}
{2}	{}	{1}
{0,1,3}	{1,2,4}	{0,3}
{1}	{2}	{0,3}

- Comme l'ensembles des états finals de l'automate A3 est F = {1,2,3,4}, alors l'ensemble des états finals de l'automate déterministe est F0 = {{1},{2},{0,3},{0,1,3},{1,2,4}}
- Voici l'automate déterministe équivalente de A3 :



Solution pour l'automate A4 :

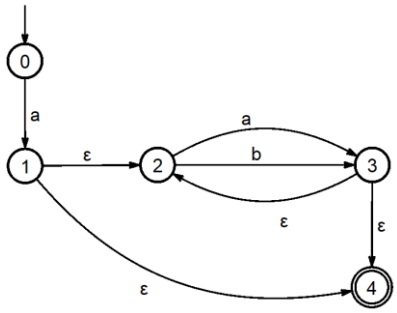


Figure 4: Automate A4

	a	b
{0}	{1,2,4}	{}
{1,2,4}	{2,3,4}	{2,3,4}
{2,3,4}	{2,3,4}	{2,3,4}

- Comme l'ensembles des états finals de l'automate A4 est F = {4}, alors l'ensemble des états finals de l'automate déterministe est F0 = {{1,2,4},{2,3,4}}
- Voici l'automate déterministe équivalente de A4 :

2. Donner l'automate déterministe équivalent à l'automate suivant sur l'alphabet {a,b} (devoir à rendre)

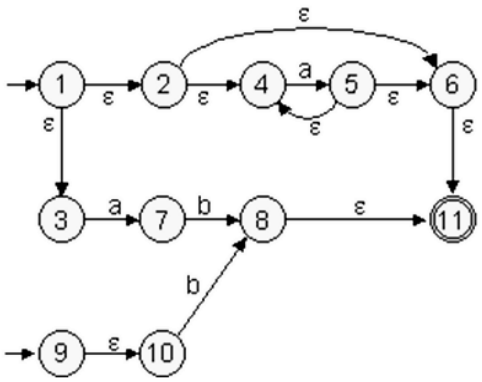
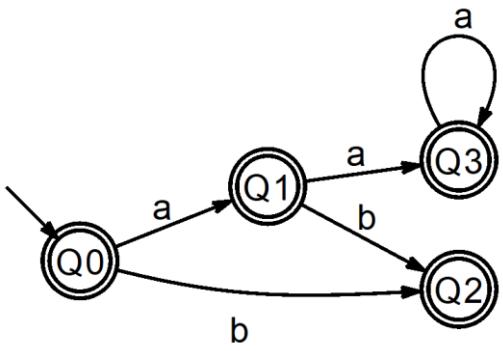


Figure 5: Automate A5

	a	b
{1,2,3,4,6,9,10,11} = Q0	{4,5,6,7,11}	{8,11}
{4,5,6,7,11} = Q1	{4,5,6,11}	{8,11}
{8,11} = Q2	{}	{}
{4,5,6,11} = Q3	{4,5,6,11}	{}



Exercice 2:

1) Donner l'AFDM équivalent à l'automate suivant sur l'alphabet {a,b,c} :

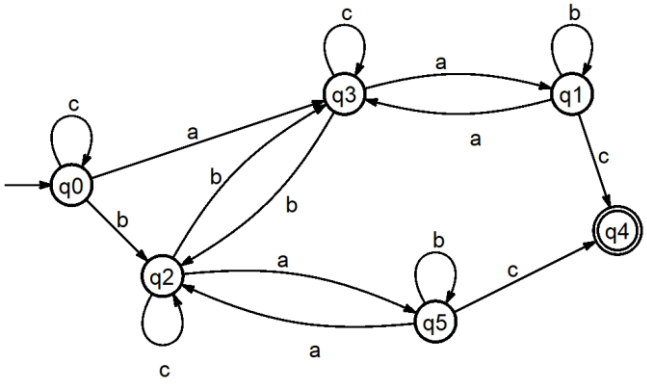
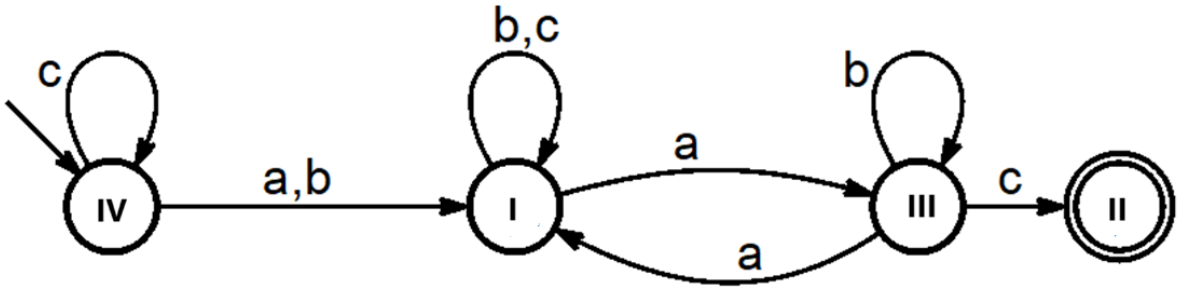


Figure 6: Automate A6

	Q0	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Bilan 0	I	I	I	I	II	I
a	I	I	I	I	-	I
b	I	I	I	I	-	I
c	I	II	I	I	-	II
Bilan 1	I	III	I	I	II	III
a	I	I	III	III	-	I
b	I	III	I	I	-	III
c	I	II	I	I	-	II
Bilan 3	IV	III	I	I	II	III
a	I	I	III	III	-	I
b	I	III	I	I	-	III
c	IV	II	I	I	-	II
Bilan 4	IV	III	I	I	II	III



2) Donner les automates déterministes minimaux équivalents aux automates suivants sur l'alphabet {a,b,c}:

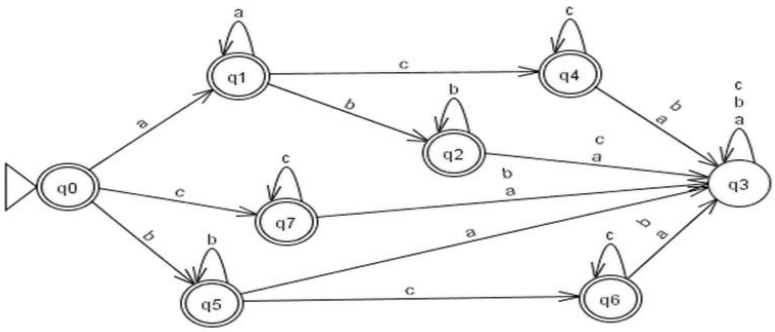
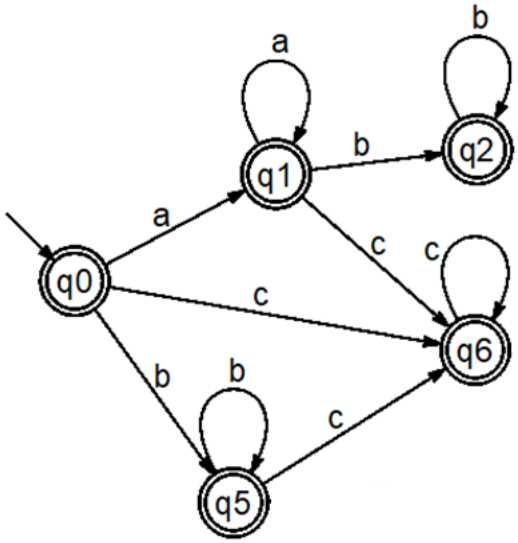


Figure 7: Automate A7

	Q0	Q1	Q2	Q4	Q5	Q6	Q7
Bilan 0	II	II	II	II	II	II	II
a	II	II	-	-	-	-	-
b	II	II	II	-	II	-	-
c	II	II	-	II	II	II	II
Bilan 1	I	I	IV	II	III	II	II
a	I	I	-	-	-	-	-
b	III	IV	IV	-	III	-	-
c	II	II	-	II	II	II	II
Bilan 3	I	V	IV	II	III	II	II
a	V	V	-	-	-	-	-
b	III	IV	IV		III	-	-
c	II	II	-	II	II	II	II
Bilan 4	I	V	IV	II	III	II	II



3) Minimiser l'automate :

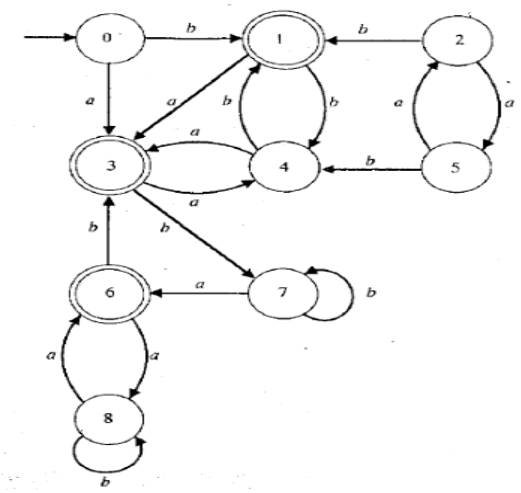
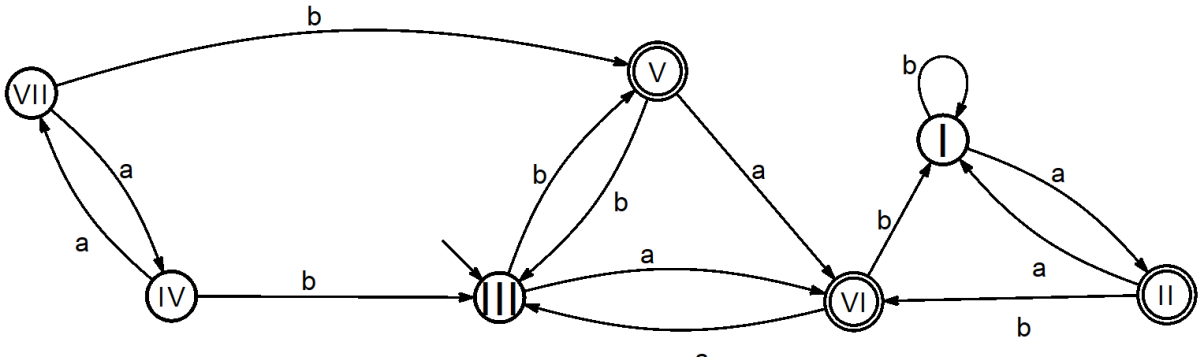


Figure 8: Automate A8

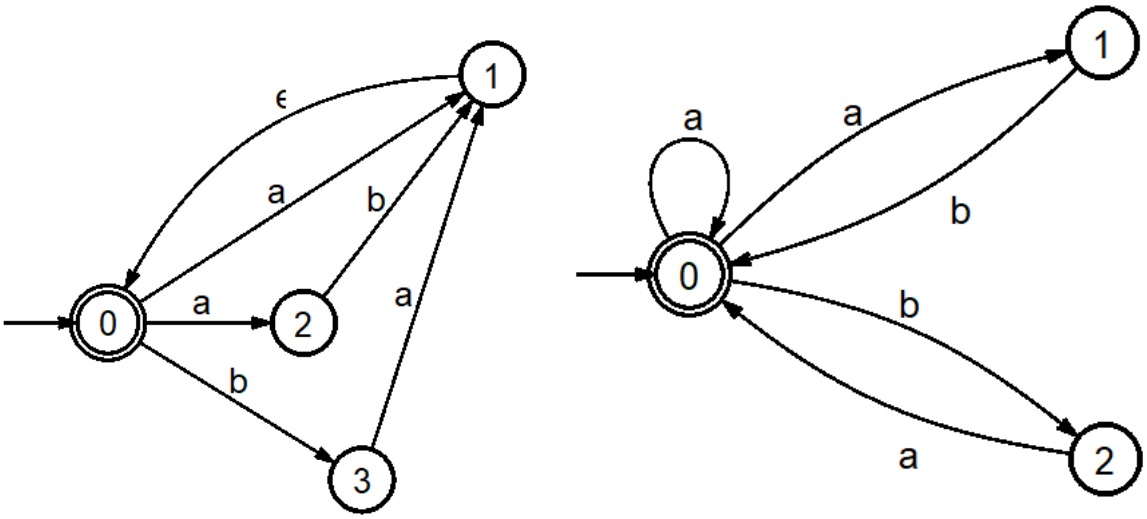
	Q0	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
Bilan 0	I	II	I	II	I	I	II	I	I
a	II	II	I	I	II	I	I	II	II
b	II	I	II	I	II	I	II	I	I
Bilan 1	III	I	II	IV	III	IV	II	I	I
a	IV	IV	IV	III	IV	II	I	II	II
b	I	II	I	I	I	III	IV	I	I
Bilan 3	III	V	III	VI	III	IV	II	I	I
a	VI	VI	IV	III	VI	III	I	II	II
b	V	III	III	I	V	III	VI	I	I
Bilan 4	III	V	VII	VI	III	IV	II	I	I
a	VI	VI	IV	III	VI	VII	I	II	II
b	V	III	V	I	V	III	VI	I	I
Bilan 5	III	V	VII	VI	III	IV	II	I	I



Exercice 3 :

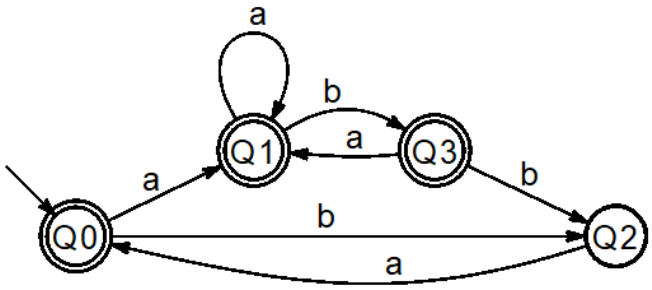
1) Soit le langage L : (a+ ab +ba)*, sur l'alphabet {a,b,c}.

a) Donner un AFN engendrant L.

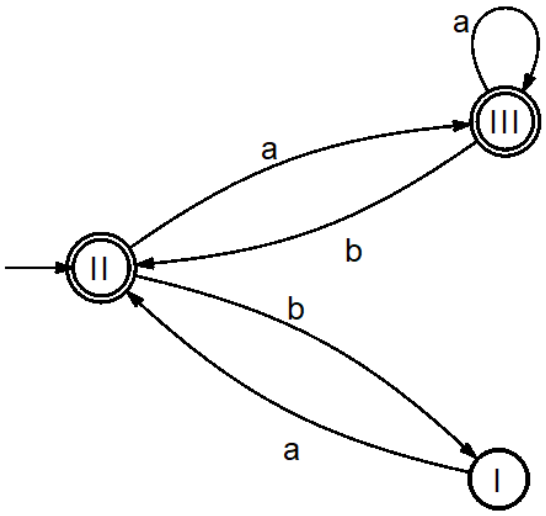


b) calculer l'AFD et l'AFDM.

	a	b
{0} = Q0	{0,1}	{2}
{0,1} = Q1	{0,1}	{0,2}
{2} = Q2	{0}	{}
{0,2} = Q3	{0,1}	{2}



	Q0	Q1	Q2	Q3
Bilan 0	II	II	I	II
a	II	II	II	II
b	I	II	-	I
Bilan 1	II	III	I	II
a	III	III	II	III
b	I	II	-	I
Bilan 3	II	III	I	II



c) En déduire une autre expression régulière de L

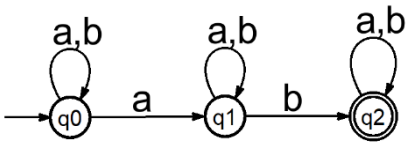
$(a^+ \mid a^+b \mid ba)^*$

2) Montrer que les deux expressions régulières E1 et E2 sont équivalentes :

E1 = $(a + b)^*a(a + b)^*\ b(a + b)^*$

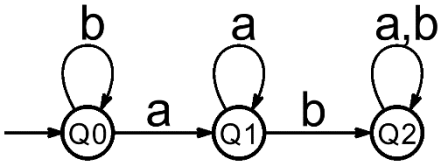
E2= $b^*a^+b(a + b)^*$

L'automate de E1 :



	a	**b**
{q0} = Q0	**{q0,q1}**	**{q0}**
{q0,q1} = Q1	**{q0,q1}**	**{q0,q1,q2}**
{q0,q1,q2} = Q2	**{q0,q1,q2}**	**{q0,q1,q2}**

L'automate déterministe minimal de E1 :



$b^*a^+b(a+b)^*$

Conclusion : **Les deux automates sont équivalentes**

Exercice 4:

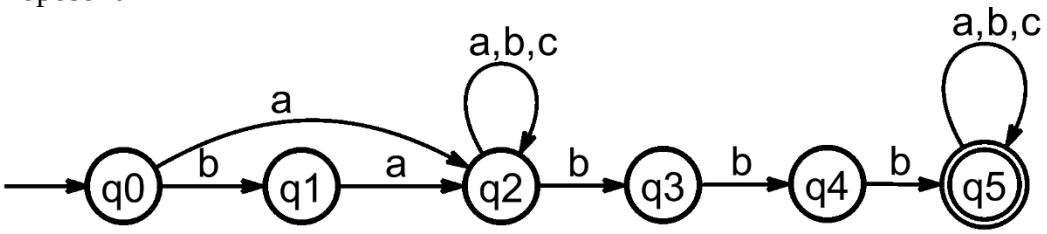
Soit le langage L sur l'alphabet {a,b,c} qui comportent les mots qui:

- Qui peut commencer soit par a ou ba.
- Comportent la chaîne bbb

1) Donner l'expression régulière de L.

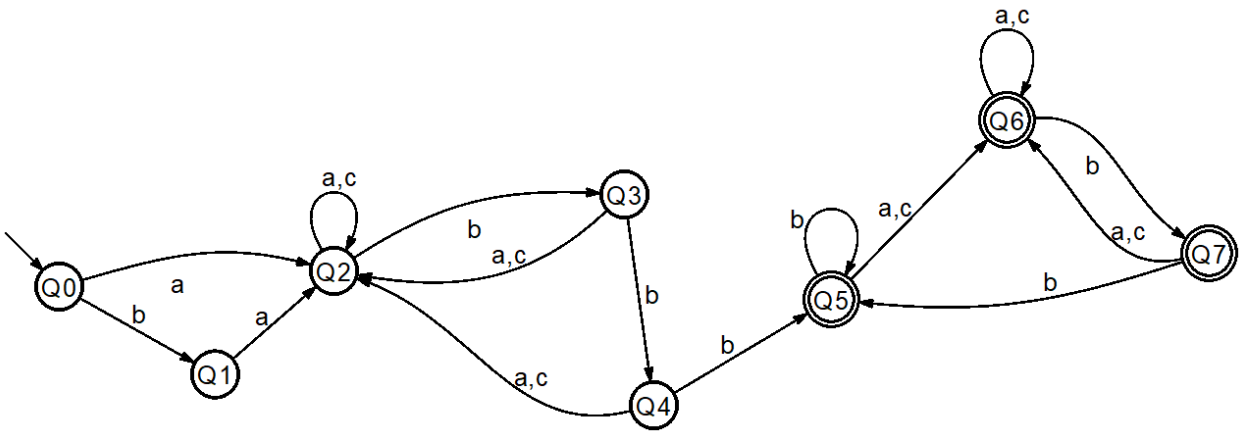
(a|ba)(a|b|c)*bbb(a|b|c)*

2) Proposer un AFN

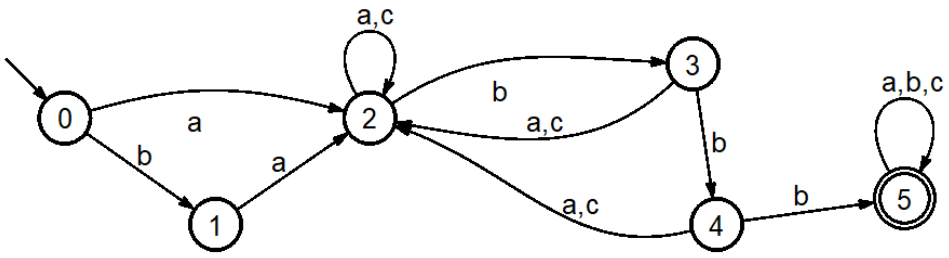


3) Calculer l'AFDM

	a	b	c
{q0} = Q0	{q2}	{q1}	{}
{q1} = Q1	{q2}	{}	{}
{q2} = Q2	{q2}	{q2,q3}	{q2}
{q2,q3} = Q3	{q2}	{q2,q3,q4}	{q2}
{q2,q3,q4} = Q4	{q2}	{q2,q3,q4,q5}	{q2}
{q2,q3,q4,q5} = Q5	{q2,q5}	{q2,q3,q4,q5}	{q2,q5}
{q2,q5} =Q6	{q2,q5}	{q2,q3,q5}	{q2,q5}
{q2,q3,q5} = Q7	{q2,q5}	{q2,q3,q4,q5}	{q2,q5}



	Q0	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7
Bilan 0	I	I	I	I	I	II	II	II
a	I	I	I	I	I	II	II	II
b	I	-	I	I	II	II	II	II
c	-	-	I	I	I	II	II	II
Bilan 1	V	IV	I	I	III	II	II	II
a	I	I	I	I	I	II	II	II
b	IV	-	I	III	II	II	II	II
c	-	-	I	I	I	II	II	II
Bilan 2	V	IV	I	VI	III	III	II	II
a	I	I	I	I	I	II	II	II
b	IV	-	VI	III	II	II	II	II
c	-	-	I	I	I	II	II	II
Bilan 3	V	IV	I	VI	III	II	II	II



4) Donner la matrice de transition du langage L.

	a	b	c
0	2	1	-1
1	2	-1	-1
2	2	3	2
3	2	4	2
4	2	5	2
5	5	5	5

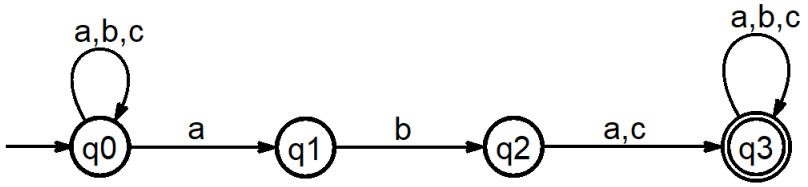
Exercice 5:

Soit l'alphabet ∑ = {a,b,c} et soit le langage L des mots qui comporte au moins une occurrence de la chaîne **aba** ou au moins une occurrence de la chaîne **abc**.

1) Donner l'expression régulière de L.

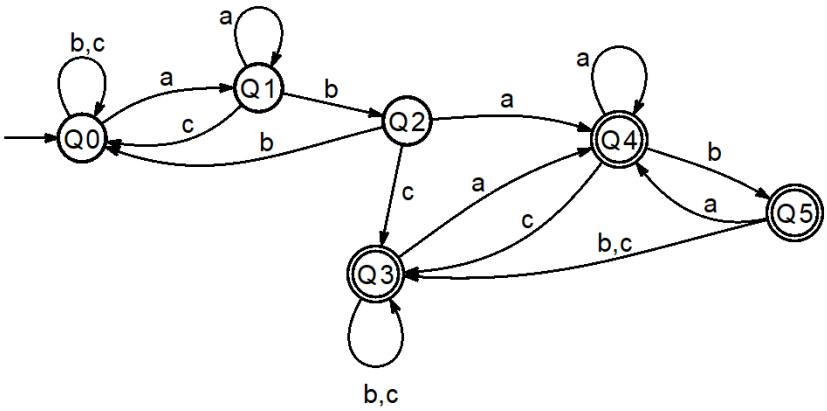
(a+b+c)*(aba+abc)(a+b+c)* ⇔ (a+b+c)*.ab.(a+c).(a+b+c)*

2) Proposer un AFD qui engendre L.



Automate déterministe équivalente :

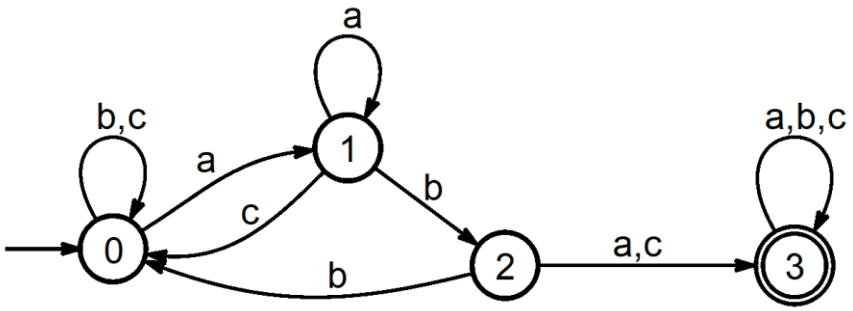
	a	b	c
{q0} = Q0	{q0,q1}	{q0}	{q0}
{q0,q1} = Q1	{q0,q1}	{q0,q2}	{q0}
{q0,q2} = Q2	{q0,q1,q3}	{q0}	{q0,q3}
{q0,q3} = Q3	{q0,q1,q3}	{q0,q3}	{q0,q3}
{q0,q1,q3} = Q4	{q0,q1,q3}	{q0,q2,q3}	{q0,q3}
{q0,q2,q3} = Q5	{q0,q3}	{q0,q3}	{q0,q3}



AFDM :

	Q0	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Bilan 0	I	I	I	II	II	II
a	I	I	II	II	II	II
b	I	I	I	II	II	II
c	I	I	II	II	II	II
Bilan 1	I	I	III	II	II	II

a	I	I	II	II	II	II
b	I	III	I	II	II	II
c	I	I	II	II	II	II
Bilan 2	I	IV	III	II	II	II
a	IV	IV	II	II	II	II
b	I	III	I	II	II	II
c	I	I	II	II	II	II
Bilan 3	I	IV	III	II	II	II



3) Donner la matrice de transition de L.

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$