

TD 3 : Méthodes numériques de recherche de zéros

Dans ce TP, nous allons considérer que les fonctions sont convexes dans les intervalles d'étude.

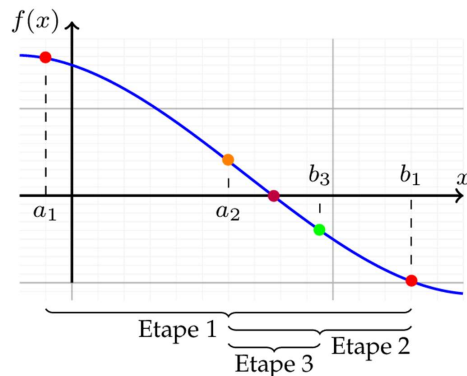
Ce TP consiste à appliquer les méthodes classiques de recherche des zéros de fonctions et à les adapter pour trouver le minimum de fonctions dans un intervalle $[a, b]$.

Exercice 1 : Méthode par dichotomie

Commençons par la méthode la plus naturelle, dite de dichotomie (ou bisection). Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x^* \in [a, b]$ tel que $f(x^*) = 0$. Si de plus f est monotone, alors x^* est unique.

Principe :

La méthode de dichotomie repose sur le fait que si une fonction continue $f(x)$ change de signe entre deux points a et b , alors il existe au moins un zéro de la fonction dans l'intervalle $[a, b]$. La méthode consiste à diviser l'intervalle en deux sous-intervalles et à réduire progressivement l'intervalle contenant le zéro jusqu'à ce que l'intervalle soit suffisamment petit.



Nous considérons pour la suite de ce TP la fonction $f(x) = x^2 - 4x - 3$, une fonction non linéaire et convexe.

- 1) Implémenter la méthode de la recherche de racine par dichotomie :

dichotomie(f, a, b, tol=1e-6, maxIter=1000)

- Si la fonction dépasse le nombre d'itération maximal avant que le critère d'arrêt soit réalisé, la fonction lève une exception avec un message d'erreur personnalisée.
- Tester la fonction déclaré pour rechercher la racine de f dans l'intervalle $[-4, 4]$. La fonction doit retourner la liste des termes de la suite et la solution finale.

- 2) Ecrire une fonction **materialiser(f, a, b)** qui va tracer la courbe de la fonction f et matérialiser la solution par un point rouge sur le graphe de la courbe.

- 3) Trouver la racine de la fonction f dans l'intervalle $[-4, 4]$. Vous tracerez la courbe de la fonction et matérialiserez la solution sur le graphe. (Voir la figure 1)

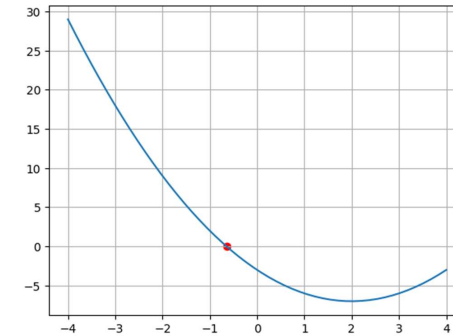


Figure 1

- 4) Adapter la fonction **materialiser** et proposer une nouvelle fonction **materialiser_min(f, fp, a, b)** pour trouver $x^* := \operatorname{argmin} \{f(x), x \in [-4, 4]\}$. Le paramètre fp est la dérivé premier de f et (Voir figure 2).

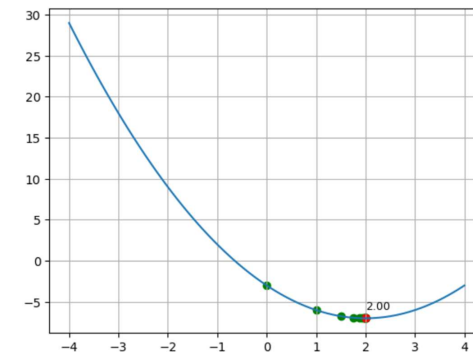


Figure 2

Exercice 2 : Méthode de Newton

La méthode de recherche de racine par dichotomie n'est pas très efficace. Elle a de plus l'inconvénient de nécessiter la définition d'un intervalle de recherche. La méthode de Newton est plus performante. Elle repose sur un développement de Taylor à l'ordre 1.

En effet, on rappelle que pour toute fonction f dérivable :

$$f(x) \approx f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

Pour trouver un zéro de cette fonction d'approximation, il suffit de calculer l'intersection de la droite tangente avec l'axe des abscisses, c'est-à-dire résoudre l'équation affine :

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

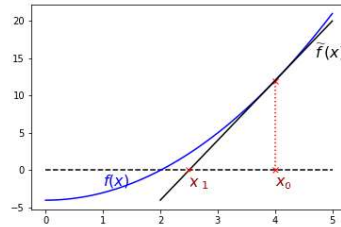


Figure 3

Ce qui donne :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

est plus proche de la racine que x_0 . Ainsi, la méthode de Newton consiste à construire la suite suivante :

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

et à l'itérer jusqu'à convergence.

- 1 Implémenter l'algorithme de Newton pour trouver la racine d'une fonction réelle dérivable. La fonction **newton(x0, f, fp, tol=1e-6, maxIter=1000)** devra retourner la liste des valeurs de la suite ainsi que la solution approchée. Vous ferez attention au critère d'arrêt (convergence).

Choisissez un des critères d'arrêt suivants :

- Tolérance sur l'incrément $|x_k - x_{k-1}| \leq tol$;
 - Tolérance sur la Valeur de la Fonction ($f(x)$) : $|f(x_k)| \leq tol$
- 2 Proposer une version adaptée de la fonction **materialiser_min_newton(x0, f, fp, fs)** qui dessine la courbe de la fonction f et matérialise le min de cette fonction. (Voir Figure 4) ;

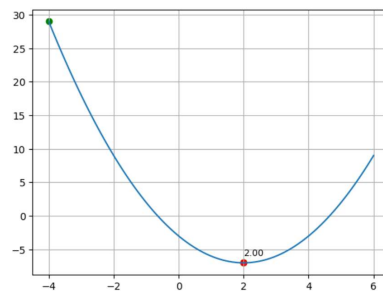


Figure 4

Comparer le résultat à celui de la recherche par dichotomie.

Exercice 3 : Méthode de la sécante

La méthode de la sécante utilise deux points initiaux x_0 et x_1 pour approximativement trouver la racine de la fonction $f(x)$. À chaque itération, une nouvelle approximation x_{n+1} est calculée en utilisant la formule suivante :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

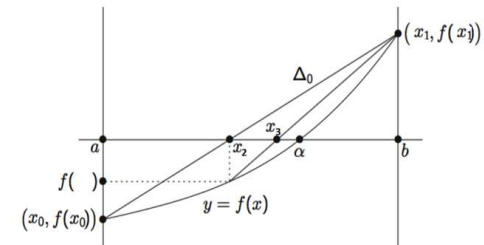


Figure 5

Algorithme :

1. **Initialisation :**
 - Choisir deux estimations initiales x_0 et x_1 proches de la racine recherchée.
2. **Itération :**
 - Calculer $f(x_{n-1})$ et $f(x_n)$.
 - Appliquer la formule de la sécante pour obtenir x_{n+1} .
3. **Critère d'Arrêt :**
 - Arrêter les itérations si la différence entre x_{n+1} et x_n est inférieure à une tolérance prédéfinie, ou si $|f(x_{n+1})|$ est inférieur à une tolérance donnée, ou si le nombre maximal d'itérations est atteint.
4. **Répéter :**
 - Répéter l'étape d'itération jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait.

Question 1 :

Implémenter l'algorithme de Newton pour trouver la racine d'une fonction réelle dérivable. La fonction **secante(f, x0, x1, tol=1e-6, maxIter=1000)** devra retourner la liste des valeurs de la suite ainsi que la solution approchée. Vous ferez attention au critère d'arrêt (convergence).